CORRECTION SUJET 2

Mercredi 29 Mars 2023

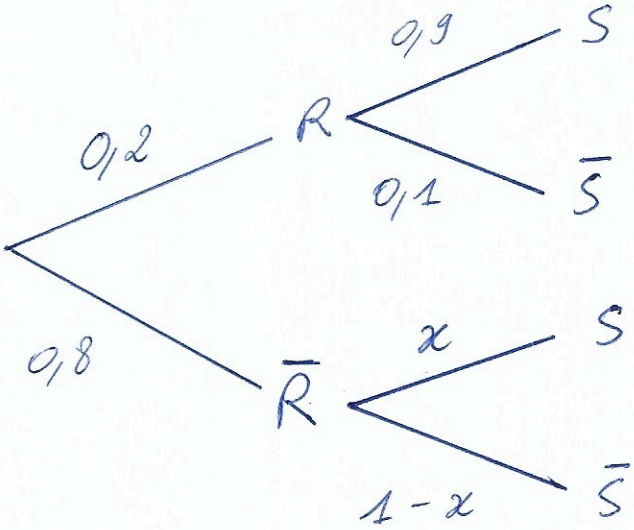
Mathématiques

Réunion

Exercice 1)

Partie A)

1)



2) D'après la formule des probabilités totales on a :

$P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$

$= P(R) \times P_R(S) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S)$

$= 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times x$

Or d'après l'énoncé, $P(S) = 0{,}82$

D'où $0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times x = 0{,}82$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}8x = 0{,}82 - 0{,}2 \times 0{,}9$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}8x = 0{,}82 - 0{,}18 = 0{,}64$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{0{,}64}{0{,}8} = \underline{\underline{0{,}8}}$

C'est à dire $P_{\bar{R}}(S) = 0{,}8$

Exercice 1) Partie A) Suite

3) $P_S(R) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}9}{0{,}82} \simeq \underline{\underline{0{,}22}}$

Partie B :

1) a) $\underline{X \longrightarrow B(5\,;0{,}82)}$

b) $P(X \leqslant 3) = 1 - P(X \geqslant 4)$

$= 1 - (P(X = 4) + P(X = 5))$

Or $P(X=4) = \binom{5}{4} \times 0{,}82^{4} \times 0{,}18^{5-4} \simeq 0{,}407$

De même $P(X=5) \simeq 0{,}371$

D'où $P(X \leqslant 3) \simeq 1 - (0{,}407 + 0{,}371)$

$\simeq \underline{\underline{0{,}222}}$

Exercice 1) Partie B) Suite

2) a) $p_n = P(X=n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= \binom{n}{n} \times 0,82^n \times 0,18^{n-n}$$

$$= 1 \times 0,82^n \times 0,18^0 = 0,82^n \times 1$$

$$= \underline{\underline{0,82^n}}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n < 0,01$

$$\Leftrightarrow \quad 0,82^n < 0,01$$

$x \mapsto \ln x$ possible car $0,82^n > 0$ et $0,01 > 0$ de plus $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0,82^n) < \ln(0,01)$$

$\forall n \in \mathbb{Z}, a > 0$
$\ln(a^n) = n \ln(a)$

$$\Leftrightarrow \quad n \times \ln(0,82) < \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)}$$

$\times \frac{1}{\ln(0,82)} < 0$ car $0,82 < 1$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n > 23,2}$$

À partir de 24 clients la probabilité que tous soient satisfaits de leur achat est inférieure à $\underline{1\%}$.

Exercice 2

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_{n+1} = \dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5}$ et $U_0 = 8$

$$U_1 = U_{0+1} = \frac{6 \times U_0 + 2}{U_0 + 5} = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{48+2}{13} = \boxed{\frac{50}{13}}$$

2) a) $\forall x \geq 0, \; f(x) = \dfrac{6x + 2}{x + 5}$

$\forall x \geq 0$, la fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$, $x \mapsto 6x + 2$ étant une fonction affine et $x \mapsto x + 5$ une fonction affine qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

$\forall x \geq 0$, f est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = 6x + 2 \qquad u'(x) = 6$

$v(x) = x + 5 \qquad v'(x) = 1$

D'où, $\forall x \geq 0, \; f'(x) = \dfrac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)}$

$$= \frac{6(x+5) - (6x+2) \times 1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{6x + 30 - 6x - 2}{(x+5)^2} = \boxed{\frac{28}{(x+5)^2}}$$

Exercice 2 (Q 2 a) Suite)

2) a) f admet pour dérivée $x \mapsto \dfrac{28}{(x+5)^2}$ sur $[0;+\infty[$

Or $28>0$ et $\forall x \in [0;+\infty[$, $(x+5)^2>0$

ainsi $\forall x \geqslant 0$, $f'(x)>0$. La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n>2$.

Soit P_n la proposition P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n>2$ »

Montrons que P_0 est vraie :

$U_0=8$ or $8>2$ c'est à dire $U_0>2$.

P_0 est vraie.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est à dire :

« $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}>2$ »

Supposons P_n vraie pour un rang n fixé, on a :

$U_n>2$ on applique la fonction f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\iff f(U_n)>f(2)$

$\iff U_{n+1} > \dfrac{6\times 2+2}{2+5} = \dfrac{12+2}{7} = \dfrac{14}{7} = 2$

D'où $U_{n+1}>2$

Exercice 2 Q2) b) Suite

2) b) La proposition P_n est initialisé et héréditaire donc

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 2.$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n = \dfrac{(2-U_n)(U_n+1)}{U_n+5}$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 2$ $\quad \big) \times(-1) < 0$

$\Leftrightarrow -U_n < -2$ $\quad \big) +2$

$\Leftrightarrow 2 - U_n < 0$

De plus $U_n > 2 \Leftrightarrow U_n + 1 > 2 + 1$

$\Leftrightarrow U_n + 1 > 3 > 0$

et $U_n > 2 \Leftrightarrow U_n + 5 > 2 + 5 = 7$

$\Leftrightarrow U_n + 5 > 7 > 0$

On utilise la règle des signes pour déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$:
Le produit au numérateur est strictement négatif comme produit d'un terme négatif et d'un terme positif.
Le dénominateur est positif (strictement) donc la fraction est strictement négative (quotient entre un terme négatif et un terme positif). Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n < 0$

Exercice 2 Q3) a) Suite

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n < 0 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$

Donc la suite (U_n) est strictement décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) D'après la question 2) b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.

Autrement dit (U_n) est minorée par 2.

La (U_n) est strictement décroissante et minorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone la suite (U_n) est convergente.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$

a) $v_0 = \dfrac{U_0 - 2}{U_0 + 1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5} - 2}{\dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5} + 1}$

$$= \frac{\dfrac{6U_n + 2 - 2(U_n + 5)}{U_n + 5}}{\dfrac{6U_n + 2 + U_n + 5}{U_n + 5}} = \frac{6U_n + 2 - 2U_n - 10}{6U_n + 2 + U_n + 5}$$

$$= \frac{4U_n - 8}{7U_n + 7} = \frac{4(U_n - 2)}{7(U_n + 1)} = \frac{4}{7} v_n$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$

Exercice 2 / 4 / c)

4/ c) La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

$$\Leftrightarrow \quad v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

Or $\frac{4}{7} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \frac{2}{3} \times 0 = \underline{\underline{0}}$

Déterminons la limite de (U_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n (U_n + 1) = U_n - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n U_n + v_n = U_n - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n U_n - U_n = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad U_n (v_n - 1) = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad U_n = \frac{-2 - v_n}{v_n - 1}$$

Or $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{-2 - v_n}{v_n - 1} = \frac{-2 - 0}{0 - 1} = -\frac{2}{-1} = \underline{\underline{2}}$

car $\lim\limits_{\mapsto +\infty} v_n = 0$

Exercice 2) 5)

5) seuil (2,001) :

$n = 0$

$u = 8$

while $u > 2,001$:

$$u = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}$$

$$n = 0 + 1 = 1$$

$n = 1$

$u = \frac{50}{13} > 2,001$:

$$u = \frac{6 \times \frac{50}{13} + 2}{\frac{50}{13} + 5} = \frac{326}{115}$$

$$n = 1 + 1 = 2$$

Le programme donne le rang du premier terme qui dépasse la valeur 2,001.

À la calculatrice $n = 14$

Exercice 31

1) La droite (d) passe par $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur

$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ d'où la représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \times t \\ y = 1 + 2 \times t \\ z = 0 + (-1) \times t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2) Le point $B \in (d) \cap \mathcal{P}$ donc les coordonnées du point $B(1\,;\,1+2t\,;\,-t)$ vérifient l'équation :

$\mathcal{P} : x + 4y + 2z + 1 = 0$

D'où $\quad 1 + 4(1+2t) + 2 \times (-t) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6 + 6t = 0 \Leftrightarrow 6t = -6 \Leftrightarrow t = -\dfrac{6}{6} = -1$

Ainsi, les coordonnées de B sont :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 \times (-1) \\ z = -(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$