CORRECTION

Sujet 1

Mardi 28 Mars 2023

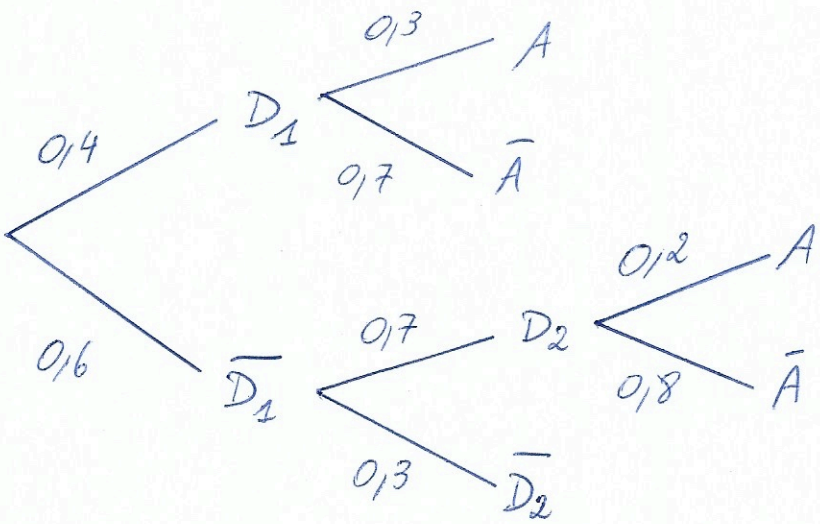
La Réunion

Mathématiques

Exercice 11

Partie A)

1)



2) D'après la formule des probabilités totales on a:

$$P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A)$$

$$= P(D_1) \times P_{D_1}(A) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \times P_{D_2}(A)$$

$$= 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}204}}$$

3) $$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}204} \approx \underline{\underline{0{,}588}}$$

Partie B)

1) a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30 ; 0{,}204)$

b. $P(X=6) = \binom{30}{6} \times 0{,}204^6 \times 0{,}796^{24} \approx \underline{\underline{0{,}179}}$

c. $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}204 = \underline{\underline{6{,}12}}$.

En moyenne, 6 personnes achètent le produit sur cet échantillon.

Exercice 1) Partie B)

2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}204^0 \times 0{,}796^n$

$= 1 - 1 \times 1 \times 0{,}796^n = 1 - 0{,}796^n$

Or on souhaite $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}796^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}796^n \geq 0{,}99 - 1 = -0{,}01$

$\times(-1) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}796^n \leq 0{,}01$

j'applique $x \mapsto \ln x$ possible car $0{,}796 > 0{,}01 > 0$ de plus $\forall x > 0$, $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}796^n) \leq \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow \quad n \ln(0{,}796) \leq \ln(0{,}01)$

$\times \frac{1}{\ln(0{,}796)} < 0$ car $0{,}796 \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}796)}$

$\Leftrightarrow \quad n \geq 20{,}18$

Ainsi, la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99 est $\underline{\underline{n = 21}}$

Exercice 2)

1) $\forall x > 0$, $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$

Or $\lim\limits_{x \mapsto 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée

D'où $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 3 \times 0 + 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty + 1 - \infty \times +\infty = +\infty - \infty$ F.I (formes indeterminée)

On factorise f :

$f(x) = x\left(3 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)\right)$ $\forall x > 0$

Or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} - 2\ln(x) = 0 - \infty = -\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty \times (3 - \infty) = +\infty \times -\infty = \underline{\underline{-\infty}}$

2) a. f est dérivable deux fois d'après l'énoncé.

$\forall x > 0$, f est de la forme $g + (-2) \times u \times v$

avec $g(x) = 3x + 1$ et $g'(x) = 3$

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = \ln(x)$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

Ainsi $\forall x > 0$, $f'(x) = g'(x) - 2 \times \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)$

$= 3 - 2 \times \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$= 3 - 2(\ln(x) + 1)$

$= 3 - 2\ln(x) - 2 = \underline{\underline{1 - 2\ln(x)}}$

exercice 2) 2) a. (Suite)

$\forall x > 0,\ 1 - 2\ln(x) > 0 \iff 1 > 2\ln(x)$

$\iff \frac{1}{2} > \ln(x)$ $\quad \times \frac{1}{2} > 0$

$x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff \sqrt{e} > x$

D'où le tableau de signe de f' :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2\sqrt{e}+1$	$\searrow$	$-\infty$

$f(\sqrt{e}) = 3\times\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e}\ln(\sqrt{e})$

$= 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e}\times\frac{1}{2}$

$= 3\sqrt{e} + 1 - \sqrt{e}$

$= 2\sqrt{e} + 1$

3) a. - Sur l'intervalle $[\sqrt{e}\,;+\infty[$:

- f est continue car dérivable
- f est strictement décroissante
- $f(\sqrt{e}) \leqslant 0 \leqslant \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ c'est à dire $2\sqrt{e}+1 \leqslant 0 \leqslant -\infty$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$

- Sur l'intervalle $]0\,;\sqrt{e}[$;

0 n'appartient pas à l'intervalle $]\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)\,; f(\sqrt{e})[$

c'est à dire l'intervalle $]1\,;2\sqrt{e}+1[$ car $2\sqrt{e}+1 > 1 > 0$

Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur $]0\,;\sqrt{e}[$.

Exercice 2) 3)a. (suite)

Ainsi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On note α tel que $f(\alpha)=0$

3) b. On en déduit que $\forall x \in]0;\alpha]$, $f(x) \geq 0$

et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f(x)<0$

4) $\forall x>0$, $F'(x)=f(x)$

Or $f(x) \geq 0$ sur $]0;\alpha]$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $]0;\alpha]$:

F est croissante sur $]0;\alpha]$

De même, $f(x)<0$ sur $]\alpha;+\infty[$ donc $F'(x)<0$

sur $]\alpha;+\infty[$; F est décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

On ne peut pas affirmer que F est strictement décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$ car f change de signe sur cet intervalle car $\alpha > \sqrt{e}$.

5) a. f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x>0$, $f''(x) = -\dfrac{2}{x} < 0$ car $x>0$

donc f est concave sur $]0;+\infty[$

La courbe de f est en dessous de ses tangentes

b. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 :

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$

Or $f(1) = 3\times 1 + 1 - 2\times 1 \ln(1) = 3+1-0 = 4$

$f'(1) = 1 - 2\ln(1) = 1-0 = 1$

d'où $y = 4+(x-1) = 4+x-1 = \underline{3+x}$

Exercice 2/ 5/c)

5/c) C_f est en dessous de ses tangentes

Donc $\forall x > 0$, $\quad f(x) \leqslant 3 + x$

$\iff \quad 3x + 1 - 2x\ln(x) \leqslant 3 + x$

$\iff \quad -2x\ln(x) \leqslant 3 + x - 3x - 1 \quad \big) -3x - 1$

$\iff \quad -2x\ln(x) \leqslant 2 - 2x \quad \big) \times \frac{1}{-2x} < 0$ car $x > 0$

$\iff \quad \ln(x) \geqslant -\frac{2}{2x} + 1$

$\iff \quad \ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}$

Exercice 3)

Partie A

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1$ avec $u_0 = 3$

$$U_1 = U_{0+1} = \frac{1}{2}U_0 + \frac{1}{2}\times 0 + 1 = \frac{1}{2}\times 3 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$U_2 = U_{1+1} = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + 1$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{4}{4} = \boxed{\frac{11}{4}}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = U_n - n$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$

$$= \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$$

$$= \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(U_n - n)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Exercice 3 Partie A Q3)

3) La réponse b. est à proscrire, n est une valeur constante choisie par l'utilisateur, la boucle ne calcule pas chaque terme de la suite.

Testons le programme avec la réponse d) pour $n = 2$

$1^{ère}$ boucle : $i = 0 \quad U = 3$

$$U = \frac{3}{2} + \frac{0}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = U_1$$

$2^{ème}$ boucle : $i = 1 \quad U = \frac{5}{2}$

$$U = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4} = U_2$$

Pour $n = 2$ le programme renvoit U_2

Il s'agit de la réponse d)

Exercice 3 Partie B

1) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant U_n \leqslant n+3$

Soit P_n la proposition P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant U_n \leqslant n+3$ »

Montrons que P_n est vraie au rang 0 :

D'après l'énoncé $U_0 = 3$

Or $0 \leqslant 3 \leqslant 3$ c'est à dire $0 \leqslant U_0 \leqslant 0+3$

P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie à un rang n fixé. Montrons que P_{n+1} vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$n \leqslant U_n \leqslant n+3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}n \leqslant \frac{1}{2}U_n \leqslant \frac{1}{2}(n+3) \quad) \times \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2 \times \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + 1 \quad) + \frac{1}{2}n + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1 \leqslant U_{n+1} \leqslant n + \frac{5}{2} \leqslant n+3 \quad \text{car } \frac{5}{2} < 3$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

La propriété P_n est initialisée et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \leqslant U_n \leqslant n+3$$

Exercice 3 partie B 2)

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant U_n$ Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Ainsi d'après le théorème de comparaison

(U_n) diverge vers $+\infty$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant U_n \leqslant n+3$ $) \times \frac{1}{n} > 0$

$\Leftrightarrow$ $1 \leqslant \frac{U_n}{n} \leqslant 1 + \frac{3}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1 + 0 = 1$

Donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n} = 1$$

Exercice 4)

1) Dans le repère $(D; \vec{DH}; \vec{DC}; \vec{DA})$

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2) M est le centre de la face BCGF et le milieu du segment [FC].

D'où $M\begin{pmatrix}\frac{x_F+x_C}{2}\\ \frac{y_F+y_C}{2}\\ \frac{z_F+z_C}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+0}{2}\\ \frac{1+1}{2}\\ \frac{1+0}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

De même, $N\begin{pmatrix}\frac{x_H+x_F}{2}\\ \frac{y_H+y_F}{2}\\ \frac{z_H+z_F}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3) a) $\vec{AG}\begin{pmatrix}x_G-x_A\\ y_G-y_A\\ z_G-z_A\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

De même : $\vec{HC} = \begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{HF} = \begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Or $\vec{AG}\cdot\vec{HC} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1\times1+1\times1+(-1)\times0 = -1+1+0 = \underline{\underline{0}}$

Exercice 41 Q3)a) suite :

$$\vec{AG}\cdot\vec{HF} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1\times 0 + 1\times 1 + (-1)\times 1$$

$$= 0 + 1 - 1 = \underline{0}$$

Le vecteur $\vec{AG}$ est <u>orthogonal</u> aux vecteurs <u>$\vec{HC}$ et $\vec{HF}$</u>

donc le vecteur $\vec{AG}$ est <u>normal au plan</u> (HFC)

Exercice 4 3/b)

3/ b/ Le vecteur $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HFC)

on en déduit une équation cartésienne de ce plan :

$$1\times x + 1\times y - 1\times z + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - z + d = 0$$

Or le point $H\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient au plan (HFC).

Ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan (HFC) donc on a :

$$1 + 0 - 0 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

D'où l'équation cartésienne complète du plan (HFC) :

$$\underline{\underline{x + y - z - 1 = 0}}$$

4/ Un vecteur directeur de la droite (AG) est le vecteur $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ appartient à la droite (AG)

Ainsi une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 1\times t \\ y = 0 + 1\times t \\ z = 1 - 1\times t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4) Q5)

5) Le point R vérifie l'équation paramétrique de (AG) et l'équation cartésienne du plan (HFC) simultanément.

Trouvons la valeur de t telle que :

$$t + t - (-t+1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t + t + t - 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{2}{3}}}$$

Ainsi R est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

6) Pour que le triangle KMN soit rectangle en K, on souhaite :

$$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_K \\ y_M - y_K \\ z_M - z_K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N - x_K \\ y_N - y_K \\ z_N - z_K \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - 1 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{t^2 - t + \frac{1}{4} = 0}$$

Exercice 4) Q6) Suite

6) $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$$

Le polynôme $t \mapsto t^2 - t + \frac{1}{4}$ s'annule pour <u>une seule valeur</u> de t.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Le triangle KMN est rectangle en K uniquement si K a pour coordonnées : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

7) Calcul du volume du tétraèdre FNKM :

$$V_{FNKM} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} \quad \text{or } \mathcal{A}_{base} = \frac{NK \times NM}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

avec $h = FK = \frac{1}{2}$

$$\text{Ainsi, } V_{FNKM} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{16 \times 3} = \boxed{\frac{1}{48}}$$

Comme $V_{cube} = 1$, le volume du tétraèdre FNKM occupe $\underline{\underline{\frac{1}{48}}}$ du volume du cube ABCDEFGH

FIN